Propagación de errores

Cuando la cantidad deseada M es relacionada directamente a cantidades medidas M1, M2, … Mn por la ecuación

$$M = \lambda\left(M_1, M_2, M_3..................,M_n\right) \qquad (2.1)$$

M se convierte en una cantidad medida indirectamente. En general, el valor de M no puede ser conocido porque los valores de M_1, M_2, … , M_n son desconocidos, pero el valor mas probable de M, denotado por Q, puede ser calculado insertando los valores mas probables de M_1, M_2, … , M_n denotados por q_1, q_2, …, q_n en (2-1). Evidentemente, los errores en las cantidades medidas directamente resultarán en un error en la cantidad calculada, el valor de la cual es importante acertar. Si las mediciones originales están disponibles, un procedimiento obvio sería calcular el valor de M correspondiente para cada juego de mediciones. La media de todos estos valores calculados será entonces obtenida y los errores característicos de la media calculados del residual.

Sin embargo, muy frecuentemente, los únicos datos disponibles son q_1, q_2, …, q_n junto con sus característicos errores, de los cuales es necesario estimar los errores característicos en Q. Puede ser que q_1, q_2, …, q_n sean los valores calculados más probables de un juego de observaciones, o pueden ser meramente valores estimados empleados en una discusión preliminar de la medición propuesta. En estos casos, se vuelve necesario ingeniar un procedimiento para relacionar los errores en las cantidades medidas al error en la cantidad calculada.

Dicho procedimiento hace posible la solución de los dos problemas fundamentales de las mediciones indirectas:

1. Dados los errores de varias cantidades directamente medidas, calcular el error de cualquier función de esas cantidades.
2. Dado un error prescrito en la cantidad a ser indirectamente medida, especificar los errores permitidos en las cantidades a ser directamente medidas.

El método es como sigue: En términos de las cantidades más probables, (2-1) puede ser escrita

$$Q = \lambda\left(q_1, q_2, q_3,............,q_n\right) \qquad (2.2)$$

El cambio diferencial en Q correspondiente a un cambio diferencial en cada una de las q’s es

$$dQ = \frac{\delta y}{\delta q_1}dq_1 + \frac{\delta y}{\delta q_2}dq_2.................\frac{\delta y}{\delta q_n}dq_n \qquad (2.3)$$

Donde $\partial\gamma/\partial q_n$ denota la derivada parcial de γ con respecto de q_n, y es obtenida diferenciando γ con respecto de q_n, con todas las otras q’s consideradas constantes.

Mario Santizo

Si las diferenciales dq_1, dq_2, …, dq_n son reemplazadas por pequeños incrementos finitos Δq_1, Δq_2, …, Δq_n, los resultados son una buena *aproximación*[1] para ΔQ en la expresión

$$\Delta Q = \frac{\delta y}{\delta q_1}\Delta q_1 + \frac{\delta y}{\delta q_2}\Delta q_2 + ... + \frac{\delta y}{\delta q_n}\Delta q_n \qquad (2.4)$$

Las cantidades Δq_1, Δq_2, …, Δq_n pueden ser consideraras como errores en q_1, q_2, …, q_n y (2-4) provee una medios para calcular el error resultante en la función. La ecuación (2-4) sostiene para cualquier tipo de errores, sólo dado que las cantidades sean pequeñas. Por otro lado, (2-4) no utiliza toda la información que pueda estar disponible y consecuentemente frecuentemente sobreestima el error en Q. el siguiente ejemplo ilustrará el uso de (2-4) y también señalará sus defectos.

CASO 2.1

Durante el curso de un análisis de desempeño de planta se hace necesario determinar la velocidad promedio de agua fluyendo por cierto tubo. El método más conveniente de medición es uno indirecto; medición del peso W de agua circulando durante el tiempo t, medición del diámetro D del tubo y el cálculo de la densidad ρ del agua y la relación

$$V_{av} = \frac{W}{tA\rho} \cong \frac{4W}{\pi D^2 t\rho} \qquad (2.5)$$

Antes de hacer cualquier medición, el ingeniero decide calcular la incertidumbre de su resultado por medios basados en la Eq.(2-4). Respectivamente, estima los valores de las variables y su incertidumbre como sigue:

1. Peso del agua. Información concerniente a las balanzas de peso está disponible en juegos de 100 lb como una figura conveniente para el peso de agua a ser recolectado. La balanza particular a ser usada todavía no es conocida. Sin embargo, el ingeniero reconoce que algunas de las balanzas en la planta están en mala condición y, en el caso de ser utilizadas, toma una incertidumbre “conservativa” de ±5lb.

[1] Las limitaciones en esta aproximación por medios del primer diferencial pueden llegar a ser más claros de las siguientes consideraciones: Los es de Δq_1, Δq_2, …, Δq_n en las cantidades q_1, q_2, …, q_n producirá un error correspondiente ΔQ en Q de acuerdo con la ecuación

$$Q + \Delta Q = \gamma\left(q_1 + \Delta q_1,\, q_2 + \Delta q_2, ..., q_n + \Delta q_n\right)$$

Expansión de γ en la vecindad de q_1, q_2, …, q_n por medios del teorema de Taylor da

$$Q + \Delta Q = \gamma\left(q_1, q_2, ...q_n\right) + \frac{\delta y}{\delta q_1}\Delta q_1 + \frac{\delta y}{\delta q_2}\Delta q_2 + ... + \frac{\delta y}{\delta q_n}\Delta q_n +$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\frac{\left(\Delta q_1\right)^2}{1.2} + ... \text{ (Terminos en orden superior)}$$

Si las cantidades Δq son pequeñas, los términos de orden superior son despreciables, y la expresión se reduce a (2-5).

2. Tiempo de recolección de muestra. Información previa indica que aproximadamente 70 segundos serán requeridos para recolectar una muestra de 100 lb. Un reloj eléctrico será usado para medir el tiempo transcurrido. El ingeniero siente que el error humano y del reloj combinados no excederá a ± 1 s.
3. El área del tubo. El diámetro nominal del tubo es 1 in. Tomando en consideración las desviaciones de un círculo perfecto, error del pie de rey, etc., el ingeniero mentalmente estima una incertidumbre del diámetro del tubo no excediendo a ± 0.03 in.
4. Densidad del agua. La temperatura del agua será aproximadamente 60ºF. La densidad del agua a 60ºF es 62.34 lb/pie^3. La incertidumbre estimada en la temperatura es ±3ºF correspondiente a una variación en la densidad de menos de 0.1 por ciento. Debido a que la incertidumbre en la densidad del agua es de un orden de magnitud menor que las otras cantidades, su efecto puede ser despreciado.

Los valores aproximados de los datos y errores máximos son entonces los siguientes:

Variable	Valor aproximado	medición
W	100 lb	± 5 lb
t	70 seg	± 1.0 seg
D	1 plg	± 0.03 plg

Las derivadas parciales de (2-5) necesidades para el uso de la ecuación en la forma de (2-4) son

$$\frac{\delta V_{av}}{\delta W}=\frac{4}{t\pi D^2\rho} \qquad \frac{\delta V_{av}}{\delta t}=-\frac{4W}{t\pi D^2\rho t^2} \qquad \frac{\delta V_{av}}{\delta D}=-\frac{8W}{t\pi\rho D^3}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{4}{t\pi D^2\rho}\Delta W-\frac{4W}{\pi D^2\rho t^2}\Delta t-\frac{8W}{t\pi\rho D^3\Delta D}\\ &=\frac{(4)(144)}{(70)(3.14)(1)(62.3)}\Delta W-\frac{(4)(100)(144)}{(3.14)(1)(62.3)(70)^2}\Delta t\\ &-\frac{(8)(100)(1{,}728)}{(70)(3.14)(62.3)(1)}\Delta D\\ &=0.042\,\Delta W-0.060\,\Delta t-100\,\Delta D\end{aligned} \tag{2.6}$$

A fin de obtener el error máximo, los signos de ΔW serán tomados como positivos y los signos de Δt y ΔD serán tomados negativos. Por tanto,

$$\Delta V = (0.042)(5) + (0.060)(1.0) + (100)\left(\frac{0.03}{12}\right) = 0.210 + 0.060 + 0.252$$

$$= \boxed{0.522\ \frac{\text{pie}}{\text{seg}}}$$

Debido a que el valor aproximado de la velocidad es

$$V = \frac{(4)(100)(144)}{(70)(3.14)(1)(62.3)} = \boxed{4.21\ \frac{\text{pie}}{\text{seg}}}$$

El máximo porcentaje de error es:

$$\pm\left(\frac{0.522}{4.21}\right)(100) = \boxed{\pm\ 12.4\ \%}$$

Algunos puntos importantes son ilustrados por el caso anterior. Será observado que el error en una cantidad calculada que es una función de varias mediciones directas depende de (1) la naturaleza de la función, (2) las magnitudes de las cantidades medidas, y (3) las magnitudes de los errores. Más aún, variables como ρ, cuyos valores son conocidos de manera mucho más exacta que el del resto de las variables, pueden ser considerados constantes, debido a que el error que introducen en el resultado final es despreciable.

Es evidente que la Eq.(2-4) probablemente sobreestime el error involucrado en la medición. No toma en cuenta la posibilidad de errores compensatorios. Aún más seria es su falla de tomar en cuenta el método usado para obtener los aproximados originales de incertidumbres de las cantidades medidas directamente. Se presume que el ingeniero sintió que los errores excediendo los estimados serían muy improbables. Claramente, entonces, la ocurrencia *simultánea* de tres extremos en errores es distintamente menos probable que la ocurrencia de errores más modestos. Por ejemplo, suponga que la probabilidad de los errores asumidos en W, t y D en el caso 2.1 son cada uno 0.1, esto eso, que el 90% del tiempo, los errores reales son menores que esto. Entonces, la probabilidad de obtener un error en V tan grande como el calculado 12.4% es sólo uno en mil. Métodos estadísticos modernos frecuentemente permiten al analista tomar tales factores de probabilidad en cuenta en el análisis de error. Cuando esto es posible, los resultados son más realistas y valiosos. Secciones subsiguientes discutirán algunos de estos métodos.

A pesar del hecho que la Eq.(2-4) usualmente sobreestima la incertidumbre de una cantidad dependiente, es una herramienta valiosa. En el caso de fórmulas del tipo de (2-5), consistiendo de los productos de los poderes de las variables, es posible efectuar una simplificación en los cálculos por el uso de errores fraccionales. Para ilustrar esto, considere la función general

$$Q = q_a^a\, q_b^b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, q_n^n \qquad (2.7)$$

Aplicando (2-4) da

$$\Delta Q = \left(q_b^b \ldots\ldots\ldots q_n^n\right) a\, q_a^{a-1} \Delta q_a + \left(q_a^a\, q_c^c \ldots\ldots\ldots q_n^n\right) b\, q^{b-1} \Delta q_b \ldots\ldots$$

& (2.8)

$$\frac{\Delta Q}{Q} = a\frac{\Delta q_a}{q_a} + b\frac{\Delta q_b}{q_b} + \ldots\ldots\ldots\ldots + n\frac{\Delta q_n}{q_n}$$

Que dice que el error fraccional en la función Q es dado por la suma de los errores fraccionales en las cantidades medidas, cada uno multiplicado por la respectiva potencia que aparece en la función. Cuando (2-8) es multiplicado por 100, se ve que la misma regla aplica a errores porcentuales. Esta regla provee una solución rápida del ejemplo precedente.

CASO 2.2

Es sugerido que se haga un intento para medir V_{av} en (2-5) a un error de ± 2.0%. Bajo esta condición, ¿cuáles son los errores permitidos en las cantidades de mediciones directas W, t y D?

Tanto (2-4) y (2-8) pueden ser usados, pero es aparente que no hay respuesta única al problema como planteado. Más condiciones son necesarias. Por ejemplo, el valor de los dos errores puede ser fijado, por tanto el tercero es fijado. En este tipo general de problema, debe reconocerse que la mano de obra y gasto involucrado en medir las varias cantidades a un grado dado de exactitud son diferentes. Idealmente, aquellas cantidades que son más fáciles de medir deben ser medidas con la mayor exactitud, siendo más tolerancia permitida en las mediciones más difíciles, a fin que la exactitud requerida en el resultado final sea obtenida con un mínimo de gastos de mano de obra e instrumentos. Porque no hay una relación general entre la dificultad y la exactitud de las mediciones, esta condición no puede dar una expresión matemática exacta. Como punto de inicio, es costumbre imponer la condición que los errores en las cantidades medidas directamente contribuyen igualmente al error en la función. Esta condición se conoce como el “principio de igual efectos.”

Aplicado a (2-4) con el entendimiento que el signo de cada Δq será tomado de tal forma que todos los términos sean del mismo signo y resultará en el máximo error permisible en ΔQ, el principio de igual efectos da

$$\Delta Q = n\frac{\delta y}{\delta q_1}\Delta q_1 = n\frac{\delta y}{\delta q_2}\Delta q_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n\frac{\delta y}{\delta q_n}\Delta q_n \qquad (2.9)$$

En el caso de una función como (2-7), es conveniente trabajar con errores fraccionales y el principio de igual efectos reduce (2-8) a

$$\frac{\Delta Q}{Q} = na\frac{\Delta q_a}{q_a} = nb\frac{\Delta q_b}{q_b} \qquad \text{etc.} \qquad (2.10)$$

Empleando (2-10) en la solución del caso 2-2, hay resultados similares en el caso de W

$$100\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = 2.0 = (3)(1)\left(\frac{\Delta W}{W}\right)(100)$$

De lo cual 100(ΔW/W) = 0.7 o ±0.7 lb/100 lb. Cálculos similares para los errores permisibles en t y D dan ±0.5 seg y ±0.003 plg, respectivamente. Estos resultados no deben considerarse inflexibles pero deben servir como base para decidir la tolerancia de errores óptima en cada cantidad para asegurar un error de no más de 2% en la velocidad calculada, con mano de obra e instrumental mínimos.

Discusiones del tipo ilustrado por los dos ejemplos anteriores frecuentemente sirven para revelar que cierta cantidad está siendo medida con un grado mayor de precisión que la necesaria, en vista que la magnitud de los errores inherentes a otras cantidades involucradas, o que atención particular se enfoque en la medición exacta de cierta cantidad, por su inusual gran influencia en el resultado calculado final. Desafortunadamente, en muchos casos importantes las funciones son bien complejas, y son necesarios cálculos involucrando datos conocidos sólo en la forma de tablas y curvas. La estimación de errores en tales casos son más difíciles y puede ser logrado con no poca frecuenta sólo por repetición real de los cálculos y comparaciones de los resultados obtenidos de diferentes juegos de valores de cantidades medidas.

Muchos cálculos de diseño importantes necesitan integraciones gráficas. Por ejemplo, uno puede enfrentar el problema de diseñar un intercambiador de calor líquido-líquido donde ambos coeficientes varían considerablemente con la temperatura. El área de transferencia de calor es calculado por la evaluación gráfica de la integral

$$A = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{dq}{U\Delta} \qquad (2.11)$$

Donde q y Δ son relacionados por el balance de calor y U, donde el coeficiente general en cualquier punto, es una función compleja de las propiedades físicas del líquido, las cuales dependen de la temperatura. En este caso, un estimado confiable del error en A debido a un dado error en la temperatura terminal es mejor obtenido por la repetición entera de los cálculos, si son utilizados diferentes valores para temperatura. Es especialmente importante notar que mientras más pequeña la diferencia de temperatura Δ, se hace más serio es el error de la magnitud dada de a temperaturas medidas.

Los errores en datos de equilibrio son particularmente serios en muchos cálculos en procesos de transferencia de masa. Los cálculos comunes en un diagrama McCabe -Thiele del número de platos teóricos requeridos para efectuar cierta separación con cierto índice de reflujo provee un ejemplo instructivo de la importancia de la exactitud en datos de equilibrio. En un diagrama binario para una mezcla de baja volatilidad relativa; un pequeño porcentaje de error en la distancia vertical de entre la curva de operación y la curva de equilibrio, con un porcentaje grande de error resultante en el número de platos teóricos. El cambio del número de platos teóricos dado al error en los errores en datos de equilibrio es mejor calculado dibujando en la curva de equilibrio en la posición correspondiente al error estimado y repitiendo la construcción para determinación del número de platos teóricos. Un procedimiento similar deberá ser empleado en la estimación del error producido por datos de equilibrio en el cómputo del número de unidades de transferencia en absorción, extracción o destilación.